PRAVDEPODOBNOSŤ

Trochu histórie:

Historickým zdrojom úvah o pravdepodobnosti boli v 16. a 17. storočí problémy hazardných hier, problémy s poisťovaním lodí, problémy so životnými poistkami, ... V minulosti predloženie a riešenie niektorých úloh sa často stalo základom dôležitých matematických disciplín. Tak sa vzrušujúce problémy hazardných hier stali jedným z podnetov vytvorenia novej, veľmi dôležitej disciplíny Teórie pravdepodobnosti. K jej rozvoju prispeli okrem Pascala a Fermata aj *Ch. Huyges* (1629-1695) - autor "O výpočtoch v hazardných hrách", *Jakub Bernoulli* (1654-1705), *A. Moivre* (1667-1754), *P.S.Laplace* (1749-1827), *Carl Fridrich Gauss* (1777-1855), *S. D. Poisson* (1781-1840) a iní.

Základné pojmy:

Nech je pevne stanovený istý systém podmienok (napr. majme pravidelnú hraciu kocku, ktorej steny sú označené číslami 1, 2, . . . , 6).
Proces (dej), ktorý môže nastať pri realizácii týchto podmienok (napr. hod touto hracou kockou) nazývame ***pokusom***.
Tu vyžadujeme, aby každý pokus mal tzv. vlastnosť ***hromadnost***i, t. j. aby sme ho mohli za tých istých podmienok *teoreticky ľubovoľne - krát opakovať*.
Výsledok tohto procesu *nie je jednoznačný*, je ***náhodný***, a nazývame ho ***náhodným javom*** alebo ***náhodnou udalosťou*** (padnutie šestky na vrchnej stene kocky).

Náhodný jav je teda výsledok ***pokusu***.

Konečnú množinu všetkých navzájom sa vylučujúcich výsledkov pokusu označujme gréckym písmenom Ω. Jej jednotlivé prvky nazývame ***elementárne udalosti*** a označujeme ich písmenom $\mathbf{e_i}$, t.j. $\mathbf{\Omega = \{e_1, e_2, ...e_n\}}$.

Podmnožiny množiny všetkých možných výsledkov pokusu (teda množiny Ω) nazývame ***náhodnými udalosťami.***

Proces (dej) - pokus:

- hod mincou,
- hod kockou,
- výlov rýb,
- pohlavie narodeného dieťaťa,
- ťah čísel v Lote, v Matese, ...,
- streľba do terča,
- výber guličiek z urny, krabice,
- atď. ... .

Náhodný jav - je jav, ktorý ako výsledok určitého pokusu môže alebo nemusí nastať.
Označujeme veľkými písmenami zo začiatku abecedy A,B,C....

- padnutie znaku pri hode mincou,
- narodené dieťa bude chlapec,
- strelec strelí do desiatky,
- vyberieme z urny 2 biele a 1 červenú guľu,
- atď. ... .

Extrémnymi prípadmi javov je **jav istý** a **jav nemožný.**

Jav istý - je taký jav, ktorý ako výsledok daného pokusu nastane ***vždy***... **P(A) = P(Ω) = 1**
Jav nemožný - je taký jav, ktorý ako výsledok pokusu ***nemôže nastať nikdy***... **P(A) = P(∅) = 0**

Napr.:

- Náhodná udalosť (pokus) - hod mincou.
  Základná množina je **Ω** = {**z**, **c**}, kde **z** znamená, že padne znak, **c** - padne číslo
- Náhodný pokus - hod kockou.
  Základná množina výsledkov je Ω = {1,2,3,4,5,6}, kde
  1 znamená, že padla stena kocky s jednou bodkou, 2 znamená že padla stena s dvomi bodkami, ..., 6 znamená, že padla stena so šiestimi bodkami.

Keďže náhodné udalosti sú podmnožiny množiny **Ω**, zaraďujeme medzi ne aj prázdnu množinu, ktorú nazývame nemožnou náhodnou udalosťou (pri hode kockou padne číslo 7) a aj celú množinu **Ω**, ktorú nazývame istou náhodnou udalosťou (pri hode kockou padne číslo od 1 po 6).

Pre náhodné udalosti platia rovnaké vzťahy a operácie ako pre podmnožiny, ale ich pomenovanie je trochu odlišné.

Operácie s náhodnými javmi

Ekvivalentnosť javov

Hovoríme, že javy A a B sú ***ekvivalentné***, ak **A = B** (ak platí ich množinová rovnosť).
Napr.:
Nech jav A znamená , že padne párny počet bodiek pri hode kockou a jav B, že padne číslo (počet bodiek) 2, 4 alebo 6. Zapíšme A={2,4,6}, B={2,4,6}. Teda javy sú ekvivalentné.

Zjednotenie javov

Jav **C = A ∪ B** nastane práve vtedy, ak nastane jav A ***alebo*** jav B.
Napr.:
Strieľame vzduchovkou na terč, kde sú očíslované oblasti 0,1,2,...,10. Nech jav A znamená, že strelíme do oblasti 10, jav B strelíme do oblasti 9.
Potom **A ∪ B**: Strelíme do oblasti aspoň 9.

Prienik udalostí

Jav **C = A ∩ B** nastane práve vtedy, keď nastane jav A ***a zároveň*** nastane jav B.
Napr.:
Majme hod kockou. Nech A, B sú javy, pričom A: padne párne číslo, B: padne číslo 4.
Potom **A ∩ B** je jav: Padne číslo 4.

Nezlúčiteľné javy

Ak platí **A ∩ B = Ø**, tak hovoríme, že udalosti A a B sú ***nezlúčiteľné***.
Napr.:
Majme hod kockou. Nech A: padne párne číslo, B: padne číslo 3.

Potom $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$, teda A, B sú nezlúčiteľné.

Pravdepodobnosť je číselná miera možnosti, že náhodný jav nastane.
m – je počet prvkov množiny **A** (počet ***priaznivých*** výsledkov)
n – je počet prvkov množiny **Ω** (počet ***všetkých*** výsledkov)

Definícia pravdepodobnosti – LAPLACEOVA schéma :

Daná je konečná množina Ω.
Udalosťou (javom) nazývame ľubovoľnú podmnožinu množiny Ω.
Pravdepodobnosťou udalosti A nazývame číslo $P(A) = m : n$,
Kde **m** počet prvkov množiny **A** a **n** počet prvkov množiny **Ω**.

Opačná udalosť A´ - jav, ktorý je ***opačný*** k javu A – je ***doplnkom*** udalostí v množine všetkých elementárnych udalostí a platí:

$$\mathbf{A \cap A' = \emptyset}, \quad \mathbf{A \cup A' = \Omega}, \quad \mathbf{P(A) + P(A') = 1}$$

Základné vlastnosti pravdepodobnosti

1. Pre každý náhodný jav $\mathbf{A \subset \Omega}$ platí: $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$
2. Pravdepodobnosť javu ***istého*** **I** je: $\mathbf{P(I) = 1 \sim P(\Omega) = 1}$
3. Pravdepodobnosť javu ***nemožného*** **0** je: $\mathbf{P(O) = 0 \sim P(\emptyset) = 0}$
4. Pravdepodobnosť ***javu opačného k javu*** **A** sa rovná: $\mathbf{P(A') = 1 - P(A)}$

Pravidlá pre počítanie s pravdepodobnosťami

Pravidlá sčitovania

- $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
- Pre vzájomne sa vylučujúce javy - $A \cap B = \emptyset$: $\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Pravidlá násobenia

- $P(A \cap B) = P(\mathbf{A})*P(B|\mathbf{A}) = P(\mathbf{B})*P(A|\mathbf{B})$
- Pre nezávislé javy: $P(A \cap B) = P(A)*P(B)$

Príklady 1 - 8:

1. V urne máme dve biele a tri čierne guľôčky. Určte množinu všetkých možných výsledkov.
   Riešenie: $\mathbf{\Omega = \{b_1b_2; b_1č_1; b_1č_2; b_1č_3; b_2č_1; b_2č_2; b_2č_3; č_1č_2; č_1č_3; č_2č_3\}}$

2. Hodíme dvakrát za sebou mincou (alebo dvoma mincami naraz).
   Koľko možných výsledkov existuje?
   Riešenie: $\mathbf{\Omega = \{rr; rl; lr; ll\}}$

3. Hádžeme dvakrát kockou (alebo dvoma kockami naraz). Určte základnú množinu Ω.

<u>*Riešenie:*</u> **Ω = {1-1; 1-2; 1-3; 1-4; 1-5; 1-6; ...; 6-5; 6-6 }** Celkom 6 x 6 = **36** prvkov.

4. V urne sú dve biele a tri čierne guľôčky. Vytiahneme jednu, zapíšeme si farbu, vrátime ju späť do urny a ťaháme druhýkrát. Koľko možných výsledkov existuje?

<u>*Riešenie:*</u>

$$\Omega = \left\{\begin{array}{l} b_1b_1, b_1b_2, b_1\check{c}_1, b_1\check{c}_2, b_1\check{c}_3, \\ b_2b_1, b_2b_2, b_2\check{c}_1, b_2\check{c}_2, b_2\check{c}_3, \\ \check{c}_1b_1, \check{c}_1b_2, \check{c}_1\check{c}_1, \check{c}_1\check{c}_2, \check{c}_1\check{c}_3, \\ \check{c}_2b_1, \check{c}_2b_2, \check{c}_2\check{c}_1, \check{c}_2\check{c}_2, \check{c}_2\check{c}_3, \\ \check{c}_3b_1, \check{c}_3b_2, \check{c}_3\check{c}_1, \check{c}_3\check{c}_2, \check{c}_3\check{c}_3. \end{array}\right\}$$

Celkom 5 x 5 = **25** možností.

5. V urne sú dve biele a tri čierne guľôčky. Vytiahneme jednu, zapíšeme si farbu. Nevraciame ju späť. Ťaháme druhýkrát. Koľko možných výsledkov existuje?

<u>*Riešenie:*</u>

$$\Omega = \left\{\begin{array}{lllll} & b_1b_2, & b_1\check{c}_1, & b_1\check{c}_2, & b_1\check{c}_3, \\ b_2b_1, & & b_2\check{c}_1, & b_2\check{c}_2, & b_2\check{c}_3, \\ \check{c}_1b_1, & \check{c}_1b_2, & & \check{c}_1\check{c}_2, & \check{c}_1\check{c}_3, \\ \check{c}_2b_1, & \check{c}_2b_2, & \check{c}_2\check{c}_1, & & \check{c}_2\check{c}_3, \\ \check{c}_3b_1, & \check{c}_3b_2, & \check{c}_3\check{c}_1, & \check{c}_3\check{c}_2, & \end{array}\right\}$$

Celkom 5 x 5 – 5 = **20** možností.

6. Nech Ω = {1,2,3,4,5,6}. Nech udalosť A spočíva v tom, že padne číslo väčšie ako 4.
Aká je pravdepodobnosť udalosti A ?

<u>*Riešenie:*</u> **A = {5; 6}** ... ***m* = *2*** a ***n* = *6*** ... P(A) = 2/6=**1/3**.

7. Nech Ω = {L, R}je padnutie líca alebo rubu mince.
Pravdepodobnosť udalosti L – padne líce je P(L) = **1/2**.
Aká je pravdepodobnosť, že pri dvojnásobnom hode padne aspoň raz líce?

<u>*Riešenie:*</u> Pri dvojnásobnom hode mincou máme všetky možnosti: **Ω = {LL,LR,RR,RL}** a
Priaznivé možnosti **A ={LL,LR,RL}** ... ***m* = *3*** a ***n* = *4*** ... P(A) = **3/4**.

8. Z debny, v ktorej je 10 súčiastok a 3 z nich sú chybné, vyberieme náhodne 5 súčiastok. Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi budú práve 2 chybné ?

<u>*Riešenie:*</u>

Z 10 prvkovej množiny možno vybrať 5 prvkovú podmnožinu : $n = \binom{10}{5} = 252$ spôsobmi.

Treba určiť počet tých pätíc, v ktorých sú práve 2 súčiastky dobré a 3 zlé.
Dobrých súčiastok je 7, zlých 3.

Všetkých možností vybratia 3 dobrých súčiastok zo 7 je : $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!.3!} = \underline{35}$

Všetkých možností vybratia 2 zlých súčiastok z 3 je : $\binom{3}{2} = \frac{3!}{1!.2!} = \underline{3}$

Všetkých možností vybratia 5 súčiastok je $m = \underline{35}.\underline{3} = 105$ ... P (U) = m/n = 105/252 = ***0,416***.

Úlohy

1. V predošlých ***príkladoch*** určte náhodné udalosti:
   1., 2. Všetky možné.
   3. A - padne aspoň raz šestka,
   B - súčet v oboch bude 12,
   C - súčet bude 6,
   D - nepadne 6.
   4. A - vytiahneme obe biele guľôčky,
   B - vytiahneme bielu v prvom a čiernu v druhom ťahu,
   C - vytiahneme prvú čiernu a druhú bielu,
   D - vytiahneme bielu v prvom ťahu,
   E - vytiahneme bielu v druhom ťahu.
   5. A - vytiahneme v oboch ťahoch biele**,**
   B - vytiahneme v prvom ťahu čiernu a v druhom bielu,
   C - vytiahneme čiernu guľôčku v oboch ťahoch,
   D - vytiahneme bielu v druhom ťahu.

2. V debne je 10 súčiastok, 3 z nich sú chybné. Vyberme náhodne 4 súčiastky.
   Aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi bude
   a) 0 chybných,
   b) práve jedna chybná súčiastka,
   c) práve dve chybné súčiastky,
   d) práve 4 chybné súčiastky ? $V: a)0{,}1\overline{6}; b)0{,}5; c)0{,}3; d)0.$

3. V Matese sa žrebuje 5 čísel spomedzi 35. Za 3 uhádnuté čísla sa vypláca tretia cena.
   Aká je pravdepodobnosť, že vyhráme tretiu cenu, ak podáme tiket s jednou päticou čísel?
   $V: 0{,}013.$

4. Z 32 hracích kariet vyberieme 5.
   Aká je pravdepodobnosť, že práve 3 z nich budú zelené? $V.0{,}077.$

5. V obchodnom dome majú zo 100 televízorov 85 prvej a 15 druhej akosti. Prvých desať kupujúcich dostalo televízor prvej akosti.
   Aká je pravdepodobnosť, že jedenástemu predajú televízor druhej akosti? $V: 0{,}1\overline{6}.$

6. Nábytkárska dielňa zhotovila 50 kresiel, z toho štyri druhej akosti. Kontrola vybrala náhodne 3 kreslá.
   Aká je pravdepodobnosť, že jedno vybraté kreslo bude druhej akosti a dve budú prvej akosti?
   $V: 0{,}2112.$

7. V šestnástich fľašiach bez nálepky sú minerálky. Vieme, že v desiatich je Santovka, šiestich Slatina.
   Aká je pravdepodobnosť, že medzi troma náhodne vybratými fľašami sú dve Santovky a jedna Slatina? $V: 0{,}4821.$

8. V urne sú 4 biele a 3 modré guľky. Náhodne vytiahneme 2 guľky.
   Aká je pravdepodobnosť, že
   a) obe guľky sú biele,
   b) jedna guľka je biela a jedna modrá? $V: a)0{,}286; b)0{,}571.$

9. Hádžeme 3 kockami.
   Aká je pravdepodobnosť, že súčet hodených bodov bude:
   a) 9 ,
   b) 10 ? V.a)0,1157; b)0,125.

Podmienená pravdepodobnosť

Za istých okolností je užitočné skúmať pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že vieme o tom, že nastal jav B. Túto pravdepodobnosť budeme označovať **P(A|B)** a čítať ***pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B***,
resp. ***podmienená pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B***.

Definícia:
(*Podmienená pravdepodobnosť*)

Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B definujeme takto: P(A|B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Jav **B** voláme ***podmienkou*** a jav **A** ***podmieneným*** javom.

Pre P(B) = 0 pravdepodobnosť P(A|B) z logických dôvodov nedefinujeme.

Príklad 9:

Isté zariadenie je v bezporuchovej prevádzke aspoň dva roky s pravdepodobnosťou ***0,8*** a aspoň tri roky s pravdepodobnosťou ***0,5***. Je známe, že toto zariadenie bolo dva roky v bezporuchovej prevádzke.
Určte pravdepodobnosť toho, že bude v bezporuchovej prevádzke ešte aspoň rok.

Riešenie:

Nech B je jav, ktorý spočíva v tom, že zariadenie je v bezporuchovej prevádzke aspoň dva roky a nech A je jav, že zariadenie je v bezporuchovej prevádzke aspoň tri roky.
V úlohe žiadame určiť pravdepodobnosť toho, že nastal jav A za predpokladu, že nastal jav B, t. j. P(A|B).
Všimnime si, že $A \subset B$ a teda $A \cap B = A$, čo znamená, že $P(A \cap B) = P(A)$.
Z týchto poznatkov pre požadovanú podmienenú pravdepodobnosť dostaneme:

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = \boldsymbol{0{,}625}$$

Príklad 10:

Dlhodobé výskumy na istom území ukázali, že zo 100 000 detí sa 82 170 dožije 40 rokov a 37 930 sa dožije 70 rokov.
Aká je pravdepodobnosť, že človek, ktorý sa dožije 40 rokov, dožije sa aj 70 rokov?

Riešenie:

A – dožiť sa 70 rokov, $P(A) = 0{,}3793$
B – dožiť sa 40 rokov, $P(B) = 0{,}8217$

Všimnime si, že $A \subset B$ a teda $A \cap B = A$, čo znamená, že $P(A \cap B) = P(A) = 0{,}3793$.

$$\boldsymbol{P(A|B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}3793}{0{,}8217} = \boldsymbol{0{,}46} \quad \textbf{...} \quad \boldsymbol{46\ \%}$$

Pravdepodobnosť, že sa človek dožije 70 rokov je 46%.

Príklad 11:

V urne máme 3 modré a 2 biele guľky. Ťaháme dvakrát, pričom po prvom ťahu guľku ***nevraciame***. Vypočítajte pravdepodobnosť vytiahnutia **bielej** guľky v **druhom ťahu**.

Riešenie:

$P(B_2 / B_1) = \boldsymbol{1/4}$ $\qquad$ $P(B_2 / M_1) = \boldsymbol{2/4}$

$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap M_1) = \boldsymbol{1/4}.2/5 + \boldsymbol{2/4}.3/5 = \mathbf{2/5}$

Príklad 12:

V urne máme 3 modré a 2 biele guľky. Ťaháme dvakrát, pričom po prvom ťahu guľku ***vrátime*** do urny. Vypočítajte pravdepodobnosť vytiahnutia **bielej** guľky v **prvom** resp. v **druhom** ťahu.

Riešenie:

$P(B_1) = \boldsymbol{2/5}$, $P(B_2) = \boldsymbol{2/5}$, $\quad P(B_2 \cap B_1) = P(B_1) . P(B_2) = 4/10 = \boldsymbol{2/5}$

Nezávislé javy

Definícia :
Dva javy **A** a **B** nazývame ***vzájomne nezávislými*** práve vtedy, keď pravdepodobnosť jedného z nich sa *nemení nastaním druhého* alebo keď pravdepodobnosť *jedného z nich je nulová*.

Túto slovnú definíciu môžeme formulovať takto:
dva javy A a B sú vzájomne nezávislými práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:

$$\mathbf{P(A|B) = P(A) \ \vee\ P(B) = 0 \ \vee\ P(B|A) = P(B) \ \vee\ P(A) = 0}$$

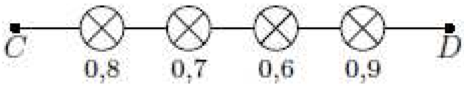
Javy - udalosti $A, B \subset \Omega$ sa nazývajú **nezávislé** práve vtedy, ak $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) . P(B)}$

Javy $A_1, A_2, ..., An \subset \Omega$ sa nazývajú **nezávislé** práve vtedy, ak

$$\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap An) = P(A_1) . P(A_2)...P(An)}$$

<u>Príklad 13:</u>

Určte pravdepodobnosť toho, že medzi bodmi C a D (obr.) preteká prúd, ak poznáme pravdepodobnosti toho, že jednotlivé žiarovky sú dobré (predpokladáme nezávislosť porúch žiaroviek).



<u>Riešenie:</u>

Nech Ai, $i \in \{1;2;3;4\}$, znamená jav, že i-ta žiarovka je dobrá a A je jav, ktorý spočíva v tom, že medzi C a D preteká prúd. Pre sériové zapojenie žiaroviek platí $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.
P(A) $= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1).\ P(A_2).\ P(A_3).\ P(A_4) = 0{,}8.0{,}7.0{,}6.0{,}5 =$ ***0,3024***

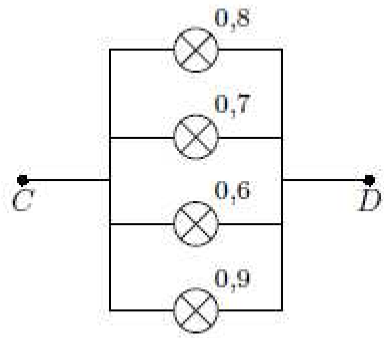
Veta: (***<u>Pravdepodobnosť zjednotenia celkove nezávislých javov</u>***).

Ak systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, je celkove nezávislým, tak

$$\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(A'_1)\ .\ P(A'_2) \ldots P(A'_n)}$$

<u>Príklad 14:</u>

Určte pravdepodobnosť toho, že medzi C a D preteká prúd, ak žiarovky z predchádzajúceho príkladu sú zapojené paralelne (obr.).
Predpokladáme nezávislosť porúch žiaroviek.



<u>Riešenie:</u>

Ak B je jav, ktorý spočíva v tom, že medzi C a D preteká prúd, tak zrejme
$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ ... ***P(B)*** $= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(A'_1)\ .\ P(A'_2)\ .\ P(A'_2)\ .\ P(A'_4) =$
$= 1 - 0{,}2\ .\ 0{,}3\ .\ 0{,}4\ .\ 0{,}5 =$ ***0,9976***

<u>Poznámka:</u>

Elektrická prechodnosť (spoľahlivosť) celého systému je ***väčšia*** než najväčšia spoľahlivosť žiaroviek.

Opakované nezávislé pokusy

Nech výsledkom nejakého pokusu je jav A. Opakujme za toho istého systému podmienok pokus n - krát, pričom predpokladáme, že tieto pokusy sú nezávislé, t. j. sú také, že výsledok každého z nich nemá vplyv na výsledok žiadneho predchádzajúceho pokusu a ani na výsledok žiadneho nasledujúceho pokusu. Ináč povedané, *pravdepodobnosť nastania javu A je v **každom** pokuse **rovnaká**.*

Príklad 15:

Určte pravdepodobnosť toho, že pri troch hodoch bežnou hracou kockou „padne šestka“ ***práve dvakrát***.

Riešenie:

Nech jav A_i, $i \in \{1; 2; 3\}$ znamená, že v i-tom hode padne šestka.
Zrejme tieto javy sú nezávislé a $\mathbf{P(A_i) = 1/6}$ a $\mathbf{P(A'_i) = 5/6}$
Pri troch hodoch kockou ***má padnúť* šestka práve dvakrát** a ***práve raz nemá padnúť***.
To nastane len vtedy, keď šestka ***nepadne*** pri prvom alebo druhom alebo treťom hode.
Tento jav C môžeme zapísať takto:

$$C = \{A'_1 \cap A_2 \cap A_3\} \cup \{A_1 \cap A'_2 \cap A_3\} \cup \{A_1 \cap A_2 \cap A'_3\} \quad \dots \quad \{\dots\dots\} = \text{disjunktné množiny}$$

$$\boldsymbol{P(C)} = P\{A'_1 \cap A_2 \cap A_3\} + P\{A_1 \cap A'_2 \cap A_3\} + P\{A_1 \cap A_2 \cap A'_3\} =$$

$$= 5/6.1/6.1/6 + 1/6.5/6.1/6 + 1/6.1/6.5/6 = 3.5/216 = \boldsymbol{5/72}$$

Veta: (***Bernoulliho veta***, resp. ***vzorec***).

Nech p je pravdepodobnosť toho, že pri danom pokuse nastane jav **A** a $\mathbf{P_n(k)}$ je pravdepodobnosť toho, že pri n – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A ***práve k - krát***.
Potom platí tzv. Bernoulliho vzorec:

$$\mathbf{P_n(k)} = \binom{n}{k}\mathbf{.p^k.(1-p)^{n-k}} \quad \text{pre} \quad \mathbf{k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}}$$

Príklad 16:

Hodíme sedemkrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že :
a) prvýkrát, tretíkrát a štvrtýkrát padne šestka, v ostatných hodoch nie,
b) štyrikrát šestka nepadne a posledné tri hody áno,
c) šestka padne práve trikrát

Riešenie :

a) $P(A) = \frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^4$

b) $P(A) = \frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^4$

c) $P(A) = \binom{7}{3}.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}078$

Príklad 17:

Sústruh vyrobí súčiastku za 1 minútu, pričom pravdepodobnosť, že súčiastka je chybná je 0,05. Aká je pravdepodobnosť, že sústruh za hodinu vyrobí **práve 5** chybných súčiastok ?

Riešenie :

$$P(A) = \binom{60}{5} .0{,}05^{5}.0{,}95^{55} = 0{,}102$$

Príklad 18:

Pravdepodobnosť vyrobenia chybnej súčiastky je 0,05. Aká je pravdepodobnosť, že medzi 60 vyrobenými súčiastkami bude **najviac 5** chybných ?

Riešenie :

$$P(A) = \binom{60}{0}.0{,}05^{0}.0{,}95^{60} + \binom{60}{1}.0{,}05^{1}.0{,}95^{59} + \binom{60}{2}.0{,}05^{2}.0{,}95^{58} + \binom{60}{3}.0{,}05^{3}.0{,}95^{57} +$$
$$+ \binom{60}{4}.0{,}05^{4}.0{,}95^{56} + \binom{60}{5}.0{,}05^{5}.0{,}95^{55} = 0{,}921$$

Úlohy

1. Aká je pravdepodobnosť, že pri desaťnásobnom hode kockou padne šestka
   a) najviac raz; b) aspoň dvakrát ?

2. Aká je pravdepodobnosť, že pri 20-násobnom hode mincou padne líce
   a) najviac 4-krát, b) aspoň 5-krát?

3. Aká je pravdepodobnosť, že v rodine so štyrmi deťmi sú a) aspoň 3 dievčatá,
   b) aspoň jeden chlapec, ak pravdepodobnosť narodenia sa chlapca je 0,51 ?

4. Študent dostane test, ktorý má 10 otázok, a ku každej z nich sú možné 3 odpovede.
   Aká je pravdepodobnosť, že študent odpovie správne aspoň na polovicu otázok, ak sa látku nenaučil a odpovede volí náhodne?

5. Ktorá z náhodných udalostí má väčšiu pravdepodobnosť:
   A - padnutie aspoň jednej šestky pri hode šiestimi kockami;
   B - padnutie aspoň dvoch šestiek pri hode dvanástimi kockami;
   C - padnutie aspoň troch šestiek pri hode osemnástimi kockami ?

Úlohy – súhrn

1. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode mincou spadne a) rub,b) líce ?

2. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode kockou spadne
a) šestka, c) číslo väčšie ako jedna,
b) párne číslo, d) číslo desať ?

3. Hodíme dvoma kockami, červenou a modrou. Aká je pravdepodobnosť, že
a) na obidvoch kockách spadne šestka,
b) na obidvoch kockách spadne nepárne číslo,
c) aspoň na jednej kocke spadne parné číslo,
d) bude súčet bodov na kockách 5,
e) bude súčet bodov na kockách menší ako 5 ?

4. Hodíme dvakrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že
a) spadne aspoň raz nepárne číslo, c) spadne súčet osem,
b) spadne dvojica parných čísel, d) spadne súčet väčší ako desať ?

5. Hodíme dvakrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že
a) spadne práve raz šestka, c) spadne najviac raz šestka,
b) spadne aspoň raz šestka, d) nespadne ani raz šestka ?

6. Hodíme trikrát kockou. Aká je pravdepodobnosť, že
a) spadne práve raz šestka, c) spadne najviac raz šestka,
b) nespadne ani raz šestka, d) spadne aspoň raz šestka ?

7. Hodíme tromi kockami. Hráč A vyhrá, ak spadne súčet bodov 10, hráč B vyhrá, ak spadne súčet bodov 11. Ak spadne iný súčet, nevyhrá nikto, hráči hádžu znova.
Ktorí z hráčov má väčšiu pravdepodobnosť výhry ?

8. Hodíme trikrát kockou. Vypočítajte pravdepodobnosť, že pri prvom hode spadne párne číslo, pri druhom hode spadne nepárne číslo a pri treťom hode šestka ?

9. Hodíme trikrát kockou. Vypočítajte pravdepodobnosť, že pri prvom, alebo pri druhom, alebo treťom hode spadne párne číslo.

10. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma mincami naraz spadne
a) na obidvoch rub, b) aspoň na jednej rub?

11. a) Aká je pravdepodobnosť, že pri troch hodoch jednou mincou spadne aspoň dvakrát líce ?
b) Aká je pravdepodobnosť, že pri hode troma mincami naraz spadne aspoň na dvoch minciach líce?

12. Hodíme jeden krát štyrmi mincami naraz. S akou pravdepodobnosťou spadne na dvoch minciach rub a na dvoch minciach líce ?

13. Koľkokrát musíme hodiť kockou, aby aspoň jedna šestka spadla s pravdepodobnosťou väčšou ako 0,5 ?

14. Koľkokrát musíme hodiť kockou, aby aspoň jedna šestka spadla s pravdepodobnosťou väčšou ako 75 % ?

15. Koľkokrát musíme hodiť dvoma kockami, aby dvojice šestiek spadla s pravdepodobnosťou väčšou ako 80 % ?

16. Koľkokrát musíme hodiť dvoma kockami, aby súčet dvanásť spadol s pravdepodobnosťou väčšou ako 50 % ?

17. Koľkokrát musíme hodiť mincou, aby pravdepodobnosť, že spadne aspoň jedenkrát líce bola väčšia ako 0,999 ?

18. Hodíme päťkrát kockou. Aká je pravdepodobnosť,že šestka spadne práve dvakrát?

19. Hodíme desaťkrát kockou. S akou pravdepodobnosťou medzi prvými piatimi hodmi nespadne žiadna šestka a medzi šiestym až desiatym hodom spadnú práve tri šestky ?

20. S akou pravdepodobnosťou spadne pri desiatich hodoch raz kockou aspoň trikrát šestka?

21. Rozhodnite, ktorí z prípadov a), b) je pravdepodobnejší.
a) Pri dvadsiatich hodoch kockou spadne šestka aspoň desaťkrát.

b) Pri dvadsiatich hodoch kockou spadne šestka najviac desaťkrát.

22. S akou pravdepodobnosťou pri desiatich hodoch dvoma kockami naraz spadne aspoň trikrát dvojica šestiek ?

23. Čo je pravdepodobnejšie ? Hodiť pri štyroch hodoch kockou práve jednu šestku, alebo hodiť pri ôsmych hodoch dvoma kockami práve jednu dvojicu šestiek ?

24. Aká je pravdepodobnosť, že sa Jana a Tomáš narodili v rovnaký mesiac ? (Počítajte, že mesiac je 1/12 roku.)

25. Aká je pravdepodobnosť, že zo skupiny 5 študentov sa aspoň dvaja študenti narodili v rovnaký mesiac ? (Počítajte, že mesiac je 1/12 roku.)

26. Aká je pravdepodobnosť, že sa Jana a Tomáš narodili v rovnaký deň ? (Narodili sa v roku 1990.)

27. V skupine je 10 dievčat a 18 chlapcov. Náhodne vyberieme skupinu 3 študentov. S akou pravdepodobnosťou sú vo vybranej skupine 2 dievčatá a jeden chlapec ?

28. V triede je 30 žiakov. Práve päť z nich nemá domácu úlohu ! Učiteľ náhodne kontroluje 6 žiakov. Vypočítajte pravdepodobnosť, že najviac dvaja žiaci, ktorých učiteľ kontroluje, nemajú domácu úlohu.

29. Dvanásť študentov, medzi ktorými je Pavel a Tomáš, majú vylosovať štvorčlennú skupinu. Aká je pravdepodobnosť, že v skupine bude

a) Tomáš, c) Tomáš a Pavel,

b) Tomáš, ale Pavel nie, d) Tomáš alebo Pavel ?

30. Šesť študentiek a osem študentov, medzi ktorými sú Jana a Dávid, majú vylosovať štvorčlennú skupinu. Aká je pravdepodobnosť, že medzi vylosovanými bude

a) Jana a Dávid, b) Jana alebo Dávid, c) Dávid, d) Jana, ale Dávid nie ?

31. Strelec zasiahol cieľ 92 krát zo 100 výstrelov.

a) Aká je pravdepodobnosť jedného zásahu cieľa ?

b) S akou pravdepodobnosťou strelec cieľ nezasiahne ?

c) Aká je pravdepodobnosť, že pri dvoch pokusoch zasiahne cieľ práve dvakrát ?

d) Aká je pravdepodobnosť, že pri troch pokusoch zasiahne cieľ aspoň jedenkrát ?

32. Strelec zasiahne cieľ v priemere osemkrát z 10 rán.

a) S akou pravdepodobnosťou zasiahne cieľ aspoň jedenkrát z troch rán ?

b) S akou pravdepodobnosťou zasiahne cieľ aspoň dvakrát z troch rán ?

c) Koľkokrát musí streliť, aby zasiahol cieľ aspoň jednou s pravdepodobnosťí, ktorá je väčšia ako 99 %?

33. Dvaja strelci strieľajú nezávisle na cieľ. Prvý strelec zasiahne cieľ s pravdepodobnosťou 0,6 , druhý s pravdepodobnosťou 0,8. Každý vystrelí práve jednu ránu. Aká je pravdepodobnosť, že

a) žiadny z nich nezasiahol cieľ,

b) práve jeden zasiahol cieľ,

c) oba dva zasiahli cieľ,

d) aký výsledok dostaneme, ak sčítame pravdepodobnosti z úloh a) až c)?

34. V porote sú traja členovia. Dvaja z nich rozhodujú s pravdepodobnosťí 0,95 správne, tretí rozhoduje tak, že si hodí mincí. Aká je pravdepodobnosť, že celá porota rozhodne správne (t.j. rozhodnou správne aspoň dvaja porotcovia) ?

35. Žiarovka svieti so spoľahlivosťou 0,85 (t.j. po určité dobe svieti jen 85 % žiaroviek). Aká je spoľahlivosť systému (aspoň časť svieti), ak sú zapojené

a) dve žiarovky sériovo,

b) dve žiarovky paralelne,

c) dve žiarovky sériovo a tretia k nim paralelne?

36. Žiarovka svieti so spoľahlivosťou 92 %. Aká je spoľahlivosť zariadenia, v ktorom sú tri žiarovky zapojené sériovo ?

37. Pravdepodobnosť úspechu určitej akcie je 0,9. Aká bude pravdepodobnosť, že pri dvojnásobnom (pri trojnásobnom) opakovaní akcie bude aspoň jedenkrát dosiahnutý úspech ?

38. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybrané trojciferné číslo je
a) párne,b) deliteľné 5 ?

39. Náhodne vyberieme štvorciferné číslo. Aká je pravdepodobnosť, že sa v jeho zápise vyskytuje cifra 8
a) práve raz, b) práve dvakrát, c) aspoň raz, d) na druhom mieste ?

40. a) S akou pravdepodobnosťou náhodne vybrané dvojciferné číslo nieje deliteľné 5 a nieje deliteľné 7 ?
b) S akou pravdepodobnosťou náhodne vybrané dvojciferné číslo nieje deliteľné 5 nebo nieje deliteľné 7?

41. Z čísel 1 až 50 vyberieme náhodne jedno číslo. S akou pravdepodobnosťou je deliteľné
a) šiestimi, b) ôsmymi, c) šiestimi a ôsmymi, d) šiestimi alebo ôsmymi ?

42. Akou pravdepodobnosťou polpriamka vedená z bodu *A* má s kružnicou *k(S;* 3 cm) aspoň jeden spoločný bod ? Riešte pre prípady, že
a) *IASI* = 6cm, b) *IASI* = 3cm, c) *IASI* = 2cm.

43. S jakou pravdepodobností pretína priamka vedená počiatkom sústavy súradníc úsečku *BC*, kde *B[l;* 2], *C[6;* -3]7

44. S akou pravdepodobnosťou polpriamka vedená z počiatku sústavy súradníc má s elipsou *(x* - 3)2 + *0,375y2* = l aspoň jeden spoločný bod ?

45. Kocku o hrane *a* = 4 cm zafarbíme modrou farbou a potom ju rozrežeme na malé kocky s hranou a_1 = l cm. Malé kocky zamiešame a náhodne vyberieme jednu kocku. Aká pravdepodobnosť, že vybraná kocka
a) má zafarbenú práve jednu stenu,
b) má zafarbenú práve dve steny,
c) má zafarbenú práve tri steny,
d) má všetky steny nezafarbené ?
e) Vypočítajte súčet pravdepodobností z úloh a) až d).

46. Kocku s hranou *a* = 4 cm zafarbíme červenou farbou a potom ju rozrežeme na malé kocky s hranou a_1 = 1 cm. Malé kocky zamiešame a náhodne vyberieme osem kociek. Aká je pravdepodobnosť, že z vybraných kociek môžme zostaviť novú kocku s hranou a_2 = 2 cm,
a) ktorá bude celá červená,
b) ktorá nebude zafarbená,
c) ktorá bude mať práve jednu stenu červenú ?

47. V lotérii je 5 červených a 3 bielych guličiek. V prvom ťahu vytiahneme jednu guličku, pri druhom ťahu vytiahneme opäť jednu guličku. S akou pravdepodobnosťou vytiahneme v druhom ťahu červenú guličku, ak po prvom ťahu guličku a) vrátime, b) nevrátime ?

48. Máme dve vrecúška. V prvom sú 3 modré a 5 čiernych guličiek, v druhom sú 4 modré a 6 čiernych. Z každého vrecúška vytiahneme jednu guličku. S akou pravdepodobnosťou budeme mať jednu modrú a jednu čiernu ?

49. Máme dve vrecúška. osudí. V prvom vrecúšku sú 3 modré a 5 čiernych guličiek, v druhom sú 4 modré a 6 čiernych guličiek. Z prvého vrecúška vytiahneme jednu guličku a dáme ju do druhého vrecúška. S akou pravdepodobnosťou potom vytiahneme z druhého vrecúška modrú guličku ?

50. Vo vrecúšku je 20 guličiek, z ktorých je práve 5 žltých. Vytiahneme naraz 2 guličky. S akou pravdepodobnosťou
a) sú obe vytiahnuté guličky žlté,
b) je medzi vytiahnutými guličkami práve jedna žltá,
c) medzi vytiahnutými nieje žiadna žltá?
d) Vypočítajte súčet pravdepodobností z úloh a) až c).

51. Vo vrecúšku je 10 guličiek, z ktorých sú práve 3 zelené. Vytiahneme naraz tri guličky. S akou pravdepodobnosťou

a) je medzi vytiahnutými aspoň jedna zelená,

b) sú medzi vytiahnutými aspoň dve zelené?

52. Vo vrecúšku je 8 červených a 6 bielych guličiek.

a) Vytiahneme postupne tri guličky. Po každom ťahu guličku vrátime. Aká je pravdepodobnosť, že postupne vytiahneme guličku červenú, bielu, červenú ?

b) Vytiahneme postupne tri guličky. Po každom ťahu guličku nevraciame. Aká je pravdepodobnosť, že postupne vytiahneme červenú, bielu, červenú ?

c) Vytiahneme tri guličky naraz. S akou pravdepodobnosťou sú vo vytiahnutej trojici guličiek dve červené a jedna biela ?

53. Vo vrecúšku sú v dostatočnom množstve rovnakým počtom zastúpené guličky biele a červené. Náhodne vytiahneme 2 guličky naraz. Bez ohľadu na počet guličiek vo vrecúšku dokážte, že pravdepodobnosť, že vybrané guličky sú

a) obe červené, je vždy menšia ako 25 %,

b) rôzna farby, je vždy väčšia ako 50 %.

54. V debničke je 40 výrobkov, z nich práve 6 je zlých. Náhodne vyberieme 5 výrobkov. S akou pravdepodobnosťou

a) budú medzi 5 vybranými výrobkami práve tri zlé,

b) budú medzi 5 vybranými výrobkami aspoň dva zlé,

c) budú medzi 5 vybranými výrobkami najviac jeden zlý ?

55. V lotérii vyhráva 4. cenu ten, koho výrobné číslo losu končí rovnakým dvojčíslom, ako je dvojčíslo, ktoré bolo vylosované. S akou pravdepodobnosťou vyhráme aspoň jednu 4. cenu, ak si kúpime

a) jeden los, b) 5 losov ?

56. Kúpime si po jednom lose v dvoch tombolách. V prvej tombole vyhráva každý desiaty, v druhej tombole vyhráva každý päťdesiaty los. Aká je pravdepodobnosť, že

a) vyhráme na obidva losy,

b) vyhráme aspoň na jeden los,

c) nevyhráme na žiadny los?

57. V tombole je 30 cien (vyhráva 30 losov). Bolo predaných 500 losov. Pán Novák si kúpil 3 losy. Aká je pravdepodobnosť, že

a) na všetky tri losy vyhrá, b) vyhrá aspoň jednu cenu?

58. Lotéria má 10000 losov, z ktorých práve 20 vyhrá. S akou pravdepodobnosťou aspoň niečo vyhráme, ak si kúpime 4 losy ?

59. Stroj vyrobí jednu súčiastku za dve minúty. Pravdepodobnosť, že súčiastka je zlá, je 0,05. Aká je pravdepodobnosť, že za smenu (8 hodín) vyrobí stroj práve 10 zlých súčiastok ?

60. Dlhodobým pozorovaním bolo zistené, že pravdepodobnosť narodenia chlapcov je 0,485, pravdepodobnosť narodenia dievčat je 0,515. Aká je pravdepodobnosť, že rodina, ktorá má tri deti, má

a) práve tri dievčatá, c) aspoň jedného chlapca,

b) dvoch chlapcov a jedno dievča, d) aspoň jednu dievča ?

Výsledky :

1 a)1/2; b)1/2.
2 a) 1/6; b)1/2; c)5/6; d) O.
3 a) 1/36; b)1/4; c)3/4; d) 1/9; e)1/6.
4 a)3/4; b)1/4; c) 5/36; d) 1/12.
5 a) 5/18; b) 11/36; c)35/36; d)25/36.
6 a)25/72; b)125/216 , c)25/27
d) 91/216
7 Pravdepodobnosť výhry obidvoch hráčov je rovnaká p = 27/216
8 1/24.
9 7/8
10 a)1/4; b)3/4.
11 a)1/2; b)1/2.
12 3/8
13 Aspoň 4x.
14 Aspoň 8x.
15 Aspoň 58x.
16 Aspoň 25x.
17 Aspoň 10x.
18 0,161.
19 0,013.
20 0,225.
21 a) 0,0006; b) 0,9999.
22 0,0022.

23 Pravdepodobnejšie je, že pri 4 hodoch spadne práve jedna šestka (0,386 > 0,182).

24 0,083.
25 0,618.
26 0,003.
27 0,247.
28 0,958.
29 a) 0,333; b) 0,242; c) 0,091; d) 0,576.
30 a) 0,066;b) 0,505; c) 0,286; d) 0,220.

31 a) 0,920; b) 0,080; c) 0,846; d) 0,999.
32 a) 0,992; b) 0,896; c) aspoň 3x.
33 a) 0,08; b) 0,44; c) 0,48; d) 1.
34 0,950.
35 a) 0,723; b) 0,978; c) 0,958.
36 0,779.
37 0,99 (0,999).
38 a) 0,5; b) 0,2.
39 a) 0,297; b) 0,051; c) 0,352; d) 0,100.
40 a) 0,678; b) 0,978.
41 a) 0,16; b) 0,12; c) 0,04; d) 0,24.
42 a) 0,167; b) 1; c) 1.
43 0,5.
44 0,167.
45 a) 0,375; b) 0,375; c) 0,125;
d) 0,125; e) 1.
46 a) 2,259.10-10; b) 1; c) 0,9996.
47 a) 0,625; b) 0,625.
48 0,475.
49 0,398.
50 a) 0,0526; b) 0,3947; c) 0,5526; d) 1.
51 a) 0,708; b) 0,183.
52 a) 0,140; b) 0,154; c) 0,462.
53 a) $\forall$ *n∈N:* $\binom{n}{2} : \binom{2n}{2} \langle \frac{1}{4}$
b) $\forall n \ni N : n^2 : \binom{2n}{2} \rangle \frac{1}{2}$
54 a) 0,017; b) 0,154; c) 0,846.
55 a) 0,010; b) 0,049.
56 a) 0,002; b) 0,118; c) 0,882.
57 a) 0,0002; b) 0,170.
58 0,008.
59 0,106.
60 a) 0,137; b) 0,363; c) 0,863; d) 0,886